Двадцатый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 18 октября 2009 г.

Четвертый тур. Лига стратегий

1. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке I, которая касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Точка Q выбрана на меньшей дуге MN вписанной окружности. Точка F на отрезке AB такова, что FN перпендикулярно IQ. Прямая, проходящая через точку F и параллельная MQ пересекает прямую NQ в точке K. Докажите, что точка K лежит на биссектрисе угла BAC.

2. Пусть G — ориентированный граф. Тогда существует такой ациклический граф G', отличающийся от G только ориентацией некоторых рёбер, что для любых двух вершин a и b длина максимального простого пути от a до b в графе G' не превосходит длины максимального простого пути от a до b в графе G.

3. В правильном шестиугольнике каждая сторона разделена на n равных частей. Через все точки деления и вершины шестиугольника проведены прямые, параллельные сторонам этого шестиугольника, которые разделили шестиугольник на правильные треугольники. Все точки внутри и на сторонах шестиугольника, через которые проходят хотя бы 2 из проведенных прямых, назовем *узлами*. Рассмотрим замкнутый путь по сторонам треугольной сетки, который проходит по каждому узлу ровно 1 раз. Докажите, что найдутся 2 узла, соседних по стороне треугольника, которые делят путь на 2 части, каждая из которых по длине не меньше трети всего пути.

4. Для множества натуральных чисел $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ $(k \geqslant 2)$ обозначим через $A + A$ множество всех чисел вида $a_i + a_j$, а через $A - A$ — множество всех чисел виду $a_i - a_j$, где i и j пробегают все возможные значения от 1 до k (в том числе и одинаковые). Например, для $A = \{1, 2, 3, 4\}$ имеем: $A + A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а $A - A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Может число элементов в $A + A$ оказаться больше чем число элементов в $A - A$?

5. Для некоторых натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ имеет место соотношение

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 \cdots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 = n.$$

Докажите, что $n = 3$ или 4.

6. Натуральные числа от 1 до n^2 выписали в ряд произвольном порядке $(n \geqslant 3)$. За один ход можно сделать одно из следующих преобразований: данную последовательность $\ldots, a, b, c, \ldots$ можно заменить на последовательность $\ldots, b, a, c, \ldots$, если $(c - a)(c - b) < 0$, а также можно заменить на последовательность $\ldots, a, c, b, \ldots$, если $(a - b)(a - c) < 0$ (в каждом случае меняются местами лишь два числа). Две последовательности назовем *эквивалентными*, если одну из них можно получить из другой с помощью нескольких ходов. Докажите, что существует не менее $\frac{1}{2}(n^4 - 2n^3)$ попарно неэквивалентных последовательностей.

7. Пусть x_1, x_2, x_3 и x_4 — вещественные числа, не меньшие единицы. Докажите, что среди них можно выбрать числа x_i и x_j $(1 \leqslant i \neq j \leqslant 4)$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{(x_i^2 - 1)(x_j^2 - 1)} + 1}{x_i x_j} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

8. Натуральные числа m и n таковы, что многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на многочлен $x^{2m}-x^m+1$. Докажите, что многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на многочлен $x^{2m}+x^m+1$.

9. Точки O, I и I_a — центры описанной, вписанной и вневписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Вневписанная окружность касается продолжения сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Известно, что $CP = BQ$. Через точку I провели прямую ℓ, параллельную прямой OI_a. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника, образованного прямыми CP, BQ и ℓ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

10. Проведены 2009 хорд данной сферы, не проходящие через ее центр. Известно, что через середину любой хорды проходит хотя бы одна из остальных хорд. Докажите, что найдутся две хорды с общей серединой.